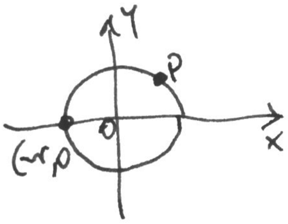
Całki krzywoliniowe. Zadania

1

21. Na płaszczyźnie dany jest okrąg $x^2+y^2=r^2$ a na nim punkt $A=(-r,0)$. Obliczyć masę okręgu zakładając, że jego gęstość $\delta(x,y)$ jest równa kwadratowi odległości punktu P od punktu A.



Rozw. Odległość punktu P od A jest równa

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(x+y)^2+y^2} \quad \text{czyli} \quad |\vec{AB}|^2 = (x^2+y^2)+y^2.$$

Korzystając z parametrycznego opisu okręgu

$x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in[0,2\pi]$ otrzymujemy

$$|\vec{AP}|^2 = 2r(1+\cos t),\quad dl = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt = r\,dt$$

Zatem masa okręgu jest równa

$$M = \int_0^{2\pi} 2r^3(1+\cos t)\,dt = 2r^3\int_0^{\pi}(1+\cos t)\,dt =$$

$$= 2r^3\left(\int_0^{2\pi}dt + \int_0^{2\pi}\cos t\,dt\right) = 2r^3\left(t\Big|_0^{2\pi} + \sin x\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= 2\pi r\left(2\pi + (0-0)\right) = 4\pi r^3.$$

22. Obliczyć długość łuku linii zadanej w postaci parametrycznej

$$x=3\cos t,\quad y=3\sin t,\quad z=4t \qquad t\in[0,4]$$

Rozw.

$$l = \int_0^4\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2+4^2}\,dt = \int_0^4\sqrt{9+16}\,dt = 5\int dt = 5\cdot 4 = 20.$$

23. Obliczyć poniższą całkę krzywoliniową po krzywej określonej na płaszczyźnie Oxy równaniem paraboli $y=\frac{1}{2}x^2$, $x\in[0,1]$.

$$I = \int_l \frac{6y}{x}\,dl.$$

Rozw. Korzystając z zależności $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ otrzymujemy

$$I = \int_0^1\frac{6x^2}{2x}\sqrt{1+x^2}\,dx = 3\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = 3\left[\frac{1}{3}(x+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]\Bigg|_0^1 = 2\sqrt{2}-1.$$

bo całka nieoznaczona

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} 1+x^2=t^2 \\ 2x\,dx = 2t\,dt \\ x\,dx = t\,dt \end{array}\right\} = \int t\cdot t\,dt = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane

a) $\int_l 3ye^x\,dl$, $l: y=e^x$, $x\in[0,\ln 3]$; Odp. $10\sqrt{10}-2\sqrt{2}$

b) $\int_l |x+y|\,dl$, $l: y=x$, $x\in[-1,1]$; Odp. $2\sqrt{2}$

c) $\int_l |y|\,dl$, $l: x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0,2\pi]$; Odp. 4

d) $\int_l z\,dl$, $l: x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=4t$; Odp. $40\pi^2$

2. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane po krzywej $\widehat{AB}$ skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t.

a) $\int_{\widehat{AB}} x\,dx+y\,dy+z\,dz$, $\widehat{AB}: x=2t$, $y=t^2$, $z=1-t$, $t\in[0,1]$; Odp 2

b) $\int_{\widehat{AB}} yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$, $\widehat{AB}: x=\cos t$, $y=\sin t$ $z=t$, $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$; Odp 0

3. Obliczyć pracę siły $\vec{W}=[x+y,2x]$ wzdłuż okręgu $x^2+y^2=R^2$
Odp. πR^2